Exercice 1:

1. On applique le pivot de Gauss pour montrer que B est inversible et déterminer l'inverse de B.

$$\begin{array}{rcc}
 & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2, & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&3\end{pmatrix}\\
L_2 \leftarrow L_2 - L_3, & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-3\\0&-2&3\end{pmatrix}\\
L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2, & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice B est bien inversible.

2. On sait que f est un automorphisme si, et seulement si, sa matrice est inversible. De plus, $\mathrm{Mat}(f^{-1})=\mathrm{Mat}(f)^{-1}$.

Ainsi, f est un automorphisme et $f^{-1} : (x, y, z) \mapsto (x, y - z, -2y + 3z)$

Exercice 2: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
Soit $f_\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire canoniquement associée à R_θ.

1. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $f(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$. On reconnaît graphiquement que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont les images respectives de e_1 et e_2 par la rotation vectorielle d'angle θ.

2. Soient θ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Par le calcul, on obtient $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$.
On en déduit que $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = R_0 = I_2$. Donc R_θ est inversible et $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.
On en déduit que f_θ est un automorphisme et que $(f_\theta)^{-1} = f_{-\theta}$.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par récurrence et à l'aide de des questions précédentes, $(R_\theta)^n = R_{n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
On en déduit que $(f_\theta)^n = f_{n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3:

1. On va montrer que f est un projecteur ou une symétrie. On calcule F^2 pour s'en convaincre.
On a bien $F^2 = F$ donc $f^2 = f$ d'où f est un projecteur. On doit déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ pour déterminer ses espaces vectoriels caractéristiques.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(F) &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 0\\ x - z = 0\\ x - y = 0\end{array}\right. \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x = y = z \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$

$\text{rg}(f) = 3-1$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. On a donc $\text{Im}(F) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

D'où $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2,1,1),(-1,0,-1))$.

2. Dans la base $((1,1,1),(2,1,1),(-1,0,-1))$ la matrice de f est diagonale : $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 4: $\text{rg}(A) = 1$, $\text{rg}(B) = 2$, $\text{rg}(C) = 3$.

Exercice 5: Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Le but est de déterminer le noyau de

$$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&a+c&a+b\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$$

On a, par opérations sur les colonnes (retirer la premières aux autres), puis sur les lignes (utiliser la première ligne pour mettre des 0 sur la première colonne puis $L_3 \leftarrow L_3 - bL_2$),

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\b+c&a-b&a-c\\bc&c(a-b)&b(a-c)\end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a-b&a-c\\0&c(a-b)&b(a-c)\end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a-b&a-c\\0&(c-b)(a-b)&0\end{pmatrix}\right)$$

En inversant les deux dernières lignes, on obtient, $\text{rg}(A) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(c-b)(a-b)&0\\0&a-b&a-c\end{pmatrix}\right)$.

- Si a,b,c sont distincts, alors $\text{rg}(A) = 3$ d'où $\text{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.
- Si $a=b=c$, $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x+y+z=0\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$
- Si deux sont égaux et le dernier distincts, par exemple $b=a$ et $c \neq a$ (les autres cas sont analogues). On a $\text{rg}(A) = 2$ et

$$\text{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x+y+z=0 \text{ et } (a+c)x+(a+c)y+2az=0\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 6: Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{B}' = ((1,2),(1,3))$.

1. $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car la famille $((1,2),(1,3))$ est libre et de cardinal 2.
   $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$.
   $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$.

2. On a $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(v) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
   Les coordonnées de $v = (1,4)$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont donc $(-1,2)$.

3. $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   D'où $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u> <u>7</u>: Soit u l'application linéaire canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On pose $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (0,0,1)$, $e'_3 = (1,1,1)$, $f'_1 = (0,1)$ et $f'_2 = (1,-1)$.
La famille $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est libre et de cardinal 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2)$ est libre et de cardinal 2, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Or :
$\text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> <u>8</u>: On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. La famille $\mathscr{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de cardinal 4, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Les coordonnées du polynôme $(X-1)^3$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(-1,3,-3,1)$ i.e. $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\left((X-1)^3\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\left((X-1)^3\right) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left((X-1)^3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Les coordonnées de $(X-1)^3$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont donc $(-1,1,0,1)$. En effet, on a bien :

$$-1 + X + X(X-1)(X-2) = (X-1)(X(X-2)+1) = (X-1)^3$$

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P) = P'$.
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
D'où
$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 9: On va raisonner par analyse et synthèse.

1. **Analyse:** Supposons qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$ et $f(u_3) = 0$ ou encore $u_3 = f^2(u_1)$.
La famille est donc de la forme $(u_1, f(u_1), f^2(u_1))$ avec $u_1 \neq 0$, $f(u_1) \neq 0$ et $f^2(u_1) \neq 0$.

2. **Synthèse:** Soit u_1 tel que $f^2(u_1) \neq 0$.
Considérons la famille $(u_1, f(u_1), f^2(u_1))$.
Cette famille est une famille de 3 vecteurs en dimension 3 donc si elle est libre alors c'est une base de E.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 f(u_1) + \lambda_3 f^2(u_1) = 0$.
   (a) On compose par f : $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f^2(u_1) + \lambda_3 f^3(u_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f^2(u_1) = 0$.
   (b) On compose par f : $\lambda_1 f^2(u_1) + \lambda_2 f^3(u_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 f^2(u_1) = 0$.
   (c) On obtient le système $\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 f(u_1) + \lambda_3 f^2(u_1) = 0 \\ \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f^2(u_1) = 0 \\ \lambda_1 f^2(u_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

   La famille $(u_1, f(u_1), f^2(u_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10:

1. On peut calculer le rang sur les lignes ou sur les colonnes de C. On remarque que $L_3 = -L_1$ donc $\mathrm{rg}(C) \leqslant 2$.
De plus, (L_1, L_2) est libre donc $\mathrm{rg}(C) = 2$.
Enfin, on sait que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ car $C_3 = 2C_1 - C_2$.
D'où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 1), (0, 1, 0))$.

2. $\mathrm{Ker}(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \left\{ \begin{array}{l} -x-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{array} \right. \right\}$

   D'où $\mathrm{Ker}(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \left\{ \begin{array}{l} x=-2z \\ y=z \end{array} \right. \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$.

3. On a $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((-2,1,1),(-1,1,1),(0,1,0)\right)$.
   Or la famille $\mathscr{B}' = ((-2,1,1),(-1,1,1),(0,1,0))$ est une famille libre de vecteurs en dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. D'où $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3$ et $\mathscr{B}'$ est base est adaptée à cette décomposition.

4. On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

__Exercice__ __11:__ Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-2y+3z=0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,-2,3)\right)$.

1. On a $F = \mathrm{Vect}\left((2,1,0),(3,0,-1)\right)$. On montre facilement que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, d'où, par un argument de dimension, $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Dans la suite, on note p la projection sur F parallèlement à G, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

2. On cherche à calculer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) *Première méthode :* Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On montre, grâce à un raisonnement par analyse-synthèse, que :
   $$(x,y,z) = \frac{2x+10y+6z}{14}(2,1,0) + \frac{3x-6y-5z}{14}(3,0,-1) + \frac{x-2y+3z}{14}(1,-2,3)$$
   Donc $p\left((x,y,z)\right) = \frac{2x+10y+6z}{14}(2,1,0) + \frac{3x-6y-5z}{14}(3,0,-1) = \frac{1}{14}(13x+2y-3z, 2x+10y+6z, -3x+6y+5z)$.
   D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

   (b) *Seconde méthode :* La famille $\mathscr{B}' = ((2,1,0),(3,0,-1),(1,-2,3))$ est une base adaptée à la décomposition $F \oplus G$.
   On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 10 & 6\\ 3 & -6 & -5\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 10 & 6\\ 3 & -6 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}13 & 2 & -3\\ 2 & 10 & 6\\ -3 & 6 & 5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. On cherche à calculer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Or, on sait que $s = 2p - \mathrm{id}$.
D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) - I_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}13 & 2 & -3\\ 2 & 10 & 6\\ -3 & 6 & 5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 6\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

<u>**Exercice** 12:</u>

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

2. La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille de 3 vecteurs en dimension 3. Il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. On évalue en -1, on trouve $\lambda_1 = 0$, puis on évalue en 1, on trouve $\lambda_2 = 0$, d'où $\lambda_3 = 0$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On doit exprimer $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Par le calcul, on trouve
$$f(P_1) = 3P_1; \quad f(P_2) = P_2; \quad f(P_3) = P_3$$
Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Par la formule de changement de base, on sait qu'on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P.\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f).P^{-1} \text{ où } P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$
En passant à la puissance, on démontre par itération que
$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^n &= P.\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix}3^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3^n & -3^n & 3^n\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3^n & -3^n+1 & 3^n-1\\ -3^n+1 & 3^n & -3^n+1\\ -3^n+1 & 3^n-1 & -3^n+2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $f^n : a+bX+cX^2 \mapsto af^n(1)+bf^n(X)+cf^n(X^2) = 3^n(a-b+c)+b-c+\left(3^n(-a+b-c)+a+c\right)X+\left(3^n(-a+b-c)+a-b+2c\right)X^2$

Exercice 13: Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible.
Soit $f : P \mapsto P(X+1)$ l'automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On a, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l$.
D'où, pour tout $j \in [\![1;n+1]\!]$, $f(X^{j-1}) = \displaystyle\sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} X^l = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}$.
On a donc que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
De plus, $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$. Or $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$, d'où

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & . \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Explicitement, pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$, $\left(A^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1}$.

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a $\mathrm{tr}(I_n) = n$.
2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notons $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ leur coefficients respectifs.

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \text{ et } \mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}$$

d'où $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Supposons que A et B sont semblables. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$ d'où

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)\,.$$

La réciproque est fausse. Contre exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (car la matrice nulle est uniquement semblable à elle même) mais ces matrices ont la même trace.

3. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ n'ont pas la même trace donc elles ne sont pas semblables.